



INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Universidade Técnica de Lisboa

MODELAÇÃO GEOMÉTRICA

por

João Manuel Brisson Lopes

Departamento de Engenharia Informática

texto elaborado para a disciplina de

Computação Gráfica

Licenciatura em Engenharia Informática e de Computadores

publicado em Junho de 2000

reeditado em Dezembro de 2008, Abril 2013

Este texto, elaborado no contexto da disciplina de Computação Gráfica da Licenciatura em Engenharia Informática e de Computadores do Instituto Superior Técnico, foi originalmente concebido para fazer parte de um conjunto de textos sobre Computação Gráfica, apresentando-se agora como um texto independente.

Contacto do autor: brisson@ist.utl.pt

© 2000, 2004, 2008, 2013 J. M. Brisson Lopes & IST

Modelação Geométrica

1 Introdução

O processamento gráfico dos objectos realiza-se através de uma sequência de operações que parte da definição da geometria e das propriedades dos objectos de uma cena e termina com a obtenção de imagens representando os objectos dessa cena, tal como o observador os vê. Os dados para este processo são a geometria e propriedades dos objectos associadas à geometria, tais como a cor. Para cada objecto, o conjunto destes dados representa (mas não é) o objecto. O conjunto dos dados constitui a representação abstracta do objecto, isto é, é o seu modelo. O conjunto de operações que concorrem para a definição da geometria e das propriedades dos objectos a ela associadas é a modelação dos objectos ou, mais propriamente, modelação geométrica dos objectos, pois propriedades como volume, massa, cor, textura e acabamento de superfícies estão intimamente relacionadas com a geometria.

A modelação geométrica com base em formas geométricas simples apresenta uma enorme potencialidade de representação. Com efeito, a partir de formas simples a que sejam atribuídas propriedades como cor e textura, é possível representar objectos mais ou menos complexos com grande detalhe. Um tipo de modelação como a proporcionada pela linguagem VRML (*Virtual Reality Mark-up Language*), que apresenta outras funcionalidades para além da modelação geométrica¹, permite representar com grande realismo objectos em cenas tridimensionais extremamente complexas a partir de formas geométricas como paralelepípedos, cones e esferas, entre outras. A figura 1.1 apresenta duas vistas diferentes da visualização de um cenário real modelado por meio de VRML.

Obviamente, os objectivos da modelação não se limitam à mera construção de modelos dos objectos para produzir imagens de cenas. No exemplo apresentado na figura 1.1, o observador pode alterar a cena adicionando ou retirando objectos como árvores, arbustos e candeeiros de iluminação pública, pode mudar o tipo de pavimento de ruas e passeios, modificar cores dos edifícios, etc. Obtemos assim uma modelação interactiva da cena².

¹ É, por exemplo, possível deslocar o ponto de vista (ou de observação) pela cena gerada e empregar diversos tipos de iluminação.

² Esta representação destinou-se a realizar uma consulta pública interactiva sobre o arranjo arquitectónico da praça representada.



Figura 1.1 - Duas vistas de uma praça modelada em VRML. Note-se o emprego intensivo de texturas nas fachadas dos edifícios (modelação de J. C. Miranda, Instituto Politécnico da Guarda).

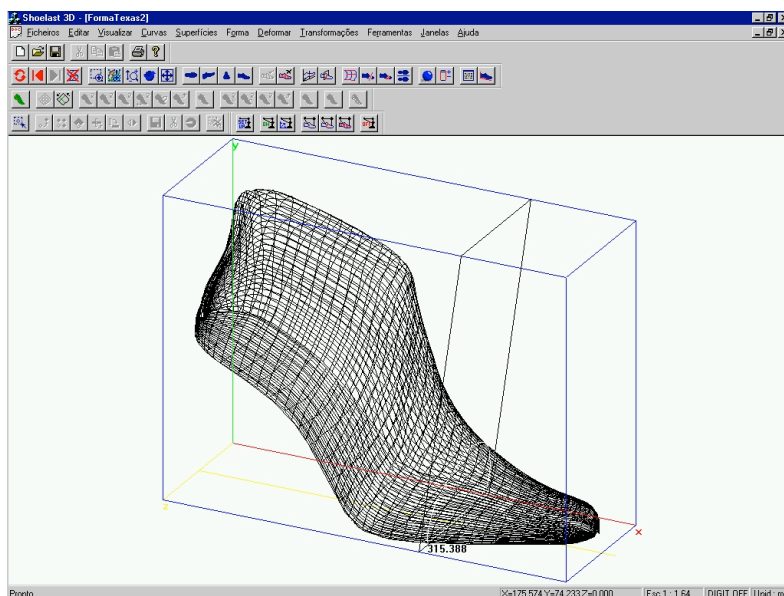


Figura 1.2 – Sistema de CAD para a indústria do calçado (L. Almeida S. Gameiro, J. Madeira, J. C. Teixeira, Centro de Computação Gráfica e Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra)

As aplicações de CAD, Computer Aided Design (em português, Concepção Assistida por Computador), no campo da arquitectura permitem aos arquitectos transferir a sua concepção de espaços (interiores e exteriores) para modelos que, seguidamente, serão refinados por alteração da geometria e das suas propriedades visuais, adicionando ou retirando objectos, acrescentando pormenores, etc. A visualização dos modelos permite verificar as consequências destas acções, explorar os espaços modelados e avaliar da sua funcionalidade e estética.

Numa outra vertente, a modelação geométrica permite definir as formas e propriedades dos objectos antes de os mesmos serem manufacturados (veja-se a figura 1.2) e determinar que processos de fabrico deverão ser empregues na sua fabricação. Os modelos assim construídos podem ser utilizados na simulação do comportamento dos objectos modelados com vista a determinar a sua resistência às solicitações mecânicas e

térmicas a que os objectos serão sujeitos durante a sua vida útil. Simulações por métodos numéricos como elementos ou diferenças finitas permitem ainda avaliar se a geometria modelada está correcta, se há material a mais ou a menos e, assim, influenciam a própria modelação dos objectos.

O CAM, *Computer Assisted Manufacturing* (em português, Fabrico Assistido por Computador), parte dos modelos dos objectos a fabricar e define os processos de fabrico, incluindo detalhes tais como trajectórias das ferramentas de corte ou das peças a fabricar, e determina e transmite às máquinas ou robots as instruções de comando numérico correspondentes às acções que estas deverão executar no fabrico das peças. Neste procedimento são tomados em conta pormenores como os acabamentos das superfícies, a forma em bruto das peças a manufacturar e a optimização do emprego dos materiais.

O CAD/CAM realiza a integração completa entre os procedimentos de concepção e de fabrico. Os processos de fabrico são muitas vezes determinantes do tipo de modelação geométrica pois, em geral, pretende-se modelar os objectos de forma tal que a transformação dos modelos geométricos em descrição dos processos de fabrico seja o mais directa e explícita possível. Na prática, a necessidade de conversão entre representações é uma constante já que os muitos sistemas de CAD e CAM empregam muitos tipos de representação com variantes próprias e armazenam as representações em formatos específicos³. Esta situação cria inúmeras ineficiências e desperdício de tempo. Foi precisamente para resolver estes problemas que a norma ISO 10303, designada por STEP (*STandard for the Exchange of Product model data*), foi introduzida. O objectivo principal desta norma é permitir a conversão entre representações diferentes de forma transparente e automática. Para isto, a norma ISO 10303 define um modelo e formato de dados neutros que funcionam como intermediários na conversão de representações entre dois sistemas diferentes. As conversões de e para o formato neutro são realizadas por meio dos protocolos de aplicação (AP), existindo um AP para cada sistema CAD ou CAM.

A modelação geométrica desempenha também um papel importante na modelação conjunta de objectos com componentes móveis e na montagem de componentes. Como exemplos poderemos citar os casos de caixas de transmissão de movimento, o funcionamento de articulações e a montagem de elevadores de vidros em portas de automóveis. Nestes casos é necessário determinar se as peças se ajustam convenientemente, se os movimentos podem ser realizados sem colisões e se existe acessibilidade para montar os componentes. Estes exemplos estendem-se ainda à própria concepção das máquinas e robots que fabricam as peças.

Finalmente, a modelação deve ter em conta o realismo das representações dos objectos. A cor e a intensidade luminosa com que os objectos são visualizados dependem das interacções da luz com os objectos, pois estes podem absorver, reflectir e refractar a luz. Isto depende das propriedades e demais características de cada superfície que a modelação geométrica dos objectos terá que comportar.

A modelação geométrica de sólidos tem assim que corresponder a necessidades várias que dependem dos fins em vista. Esta diversidade conduziu ao aparecimento de tipos variados e específicos de representações para a modelação de sólidos, em que cada tipo pretende responder aos requisitos de um certo tipo de fins. Como resultado, não existe nenhuma representação universal.

³ Também designados por formatos proprietários.

Este capítulo apresenta uma introdução aos vários tipos de representação empregues na modelação de sólidos, aos requisitos que as representações devem satisfazer e às operações que devem poder realizar, terminando com a abordagem de uma representação, a representação por malha de polígonos, que, por razões históricas e funcionais, assume grande importância em Computação Gráfica.

2 Propriedades Desejáveis para as Representações

Existem vários tipos de representação para a modelação geométrica de sólidos em que cada forma pode ainda apresentar variantes. Esta multiplicidade tem origem nos requisitos particulares decorrentes dos objectivos de cada tipo de representação. No caso do fabrico de peças é necessário, por exemplo, minimizar a distância entre a representação da peça e o seu processo de fabrico de forma a evitar a conversão entre representações. Mas o fabrico de uma peça por vazamento em molde ou por corte por arranque de aparas são diferentes. A representação por instanciação de primitivas pode ser a melhor representação para o primeiro processo, enquanto a representação por varrimento parece ser a mais adequada para o segundo. Em qualquer dos casos a modelação dos objectos deve ser a mais exacta possível para que o tipo de representação não introduza quaisquer artefactos indesejáveis.

Em primeiro lugar, convém que as representações sejam universais, isto é, possam representar todos os objectos imagináveis e não apenas um número restrito. Como tal é impossível na prática, as representações deverão então poder representar o maior número possível de objectos.

Os objectos devem também ser fielmente representados. A fidelidade na representação significa que a representação deve ser obtida para que não possam existir ambiguidades de interpretação quanto ao objecto representado. Uma representação sem ambiguidades é uma representação completa se não forem omitidos quaisquer detalhes.

As representações devem ser únicas. A unicidade da representação implica que cada tipo de representação não possa representar um objecto por mais do que uma forma. A unicidade de representação permite simplificar operações tais como a comparação entre dois objectos. Se não houvesse uma representação única, poder-se-ia concluir que dois objectos eram diferentes embora se tratasse do mesmo objecto representado de duas maneiras.

A representação de objectos deve ser precisa, isto é, não deve conter aproximações pois disto depende o realismo da sua visualização (um cone com a aparência de pirâmide) e a correcção com que poderá ser manufacturado.

Para garantir os objectivos atrás enunciados, os processos de criação de representações dos modelos geométricos de sólidos devem ainda ser tais que tornem difícil a criação de representações inválidas e, por outro lado, seja fácil criar representações válidas. No fundo, o que se exige é que os processos de criação de representações apresentem menores probabilidades de ocorrência de erros. Este requisito tem igualmente a ver com a necessidade de que as representações criadas continuem a ser válidas mesmo depois de quaisquer transformações que lhes sejam aplicadas.

Finalmente, o processamento de representações dos modelos geométricos de sólidos requer que estas sejam compactas para que os processamentos sejam rápidos e que estes possam igualmente ser realizados através de algoritmos eficientes.

3 Tipos de Representação

3.1 Instanciação de Primitivas

A representação de objectos por instanciação de primitivas é uma das representações mais usadas devido à sua grande simplicidade e flexibilidade de emprego. Este tipo de representação tem por base a definição de objectos geométricos tridimensionais, as primitivas, que possuem atributos, os parâmetros, cujos valores são definidos pelo utilizador no momento da criação de uma nova instância. Um exemplo simples de uma primitiva é o de um paralelepípedo com três parâmetros: comprimento, largura e altura. Ao variar os valores destes parâmetros, obter-se-ão paralelepípedos diferentes que são instâncias da mesma forma geométrica primitiva. O conceito de parâmetro não está confinado às dimensões. Assim, a primitiva pirâmide regular pode ter como parâmetro o número de faces laterais para além de parâmetros tipicamente geométricos como a sua altura e o raio da sua base. Podemos ainda alargar o conceito de parâmetro para englobar propriedades dos objectos reais a modelar tais como a definição dos materiais constituintes dos objectos e o acabamento das suas superfícies.

A instanciação de primitivas torna-se extremamente conveniente e simples quando as primitivas definem formas geométricas complexas, de definição difícil e morosa, e que não podem ser obtidas por operações lógicas tais como a adição ou subtracção de volumes, como são os casos de parafusos e rodas dentadas. Estes encontram-se normalizados e agrupados em séries também normalizadas. As séries definem características como a forma da cabeça dos parafusos ou dos dentes das rodas dentadas. Dentro da cada série de rodas dentadas, as dimensões e o número de dentes, respectivo passo e espessura dependem de um número reduzido de parâmetros. No caso de parafusos, uma designação como "parafuso M10 de aço com cabeça sextavada" identifica imediatamente todas as características geométricas de uma instância da primitiva "parafuso métrico". Ao utilizador bastará então seleccionar o material (aço), o tipo de cabeça ("sextavada"), o tipo de rosca (M de métrica) e o diâmetro característico (10 mm) para que a instância a criar esteja completamente definida e não se tenha que demorar e preocupar com a definição de detalhes geométricos ou construtivos do parafuso (veja-se a figura 3.1). O mesmo se passará quando for necessário instanciar uma porca para aquele parafuso ou um furo onde o parafuso deverá enroscar. É claro que a instanciação de primitivas obriga à sua definição prévia, mas esta definição é feita uma única vez. As primitivas serão então postas à disposição dos utilizadores em bibliotecas ou repertórios mais ou menos complexos mas sempre adequados aos fins em vista⁴.

⁴ Muitas aplicações de modelação por instanciação de primitivas são configuráveis através da adição de bibliotecas especializadas de primitivas, muitas vezes desenvolvidas por terceiros.

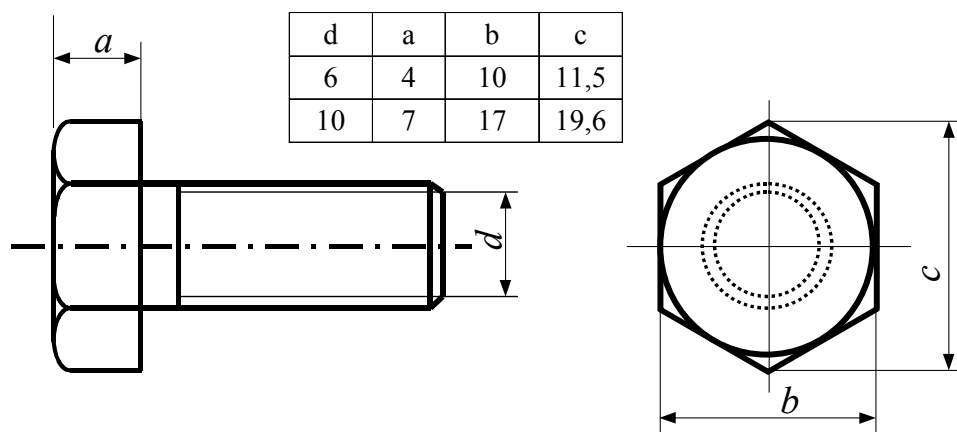


Figura 3.1 - Instanciação de primitivas no caso de parafusos de rosca métrica. Estes parafusos dependem apenas de quatro parâmetros normalizados (NP-131). A tabela apresenta as dimensões dos parafusos M6 e M10.

Os objectos modelados por instanciação de primitivas são agrupáveis para construir objectos mais complexos. Um exemplo disto é um trem de engrenagens em que instâncias diferentes de uma mesma primitiva (roda dentada) são colocadas sobre um eixo comum. Este trem pode então ser associado a outro trem e, se se providenciarem os apoios dos dois trens, uma caixa envolvente e um comando de posicionamento dos trens, obteremos uma caixa de velocidades. Esta é o nível mais elevado de uma hierarquia construída a partir das rodas dentadas, o nível mais baixo, associadas num trem de engrenagens, o nível intermédio. A hierarquização é uma propriedade importante da representação da modelação de sólidos por instanciação de primitivas.

Os sistemas de CAD (Concepção Assistida por Computador) baseiam-se na sua generalidade na instanciação de primitivas, devido à sua flexibilidade, simplicidade e hierarquização.

Numa hierarquia de objectos, cada uma das instâncias continua a ser um objecto independente, mantendo os valores atribuídos aos seus parâmetros no momento da instanciação. Não é então possível definir uma nova primitiva com parâmetros próprios à custa das primitivas existentes. Para criar uma nova primitiva é necessário criar um novo objecto e definir os seus parâmetros e os procedimentos de cálculo de propriedades como o volume e o centro de massa.

3.2 Representação por Varrimento

A representação de sólidos tridimensionais por varrimento ("sweep") tem por base a descrição do volume gerada quando um objecto é deslocado segundo uma dada trajectória e varre um dado volume. O exemplo mais simples é o de um círculo deslocado segundo uma trajectória linear perpendicular ao círculo. O volume varrido resultante é um cilindro obtido por translação. Um processo de fabrico em que um material plástico é obrigado a passar por um crivo com um orifício circular produz um resultado idêntico. O material toma a forma de um cilindro à saída do crivo e o volume descrito resulta de um varrimento por extrusão⁵. Se o círculo considerado descrever uma trajectória circular, o volume varrido pelo círculo toma a forma de um toro, obtido por

⁵ O processo de fabrico descrito tem igualmente o nome de extrusão.

um varrimento por rotação. A figura 3.2 apresenta exemplos de sólidos gerados por extrusão e rotação a partir de secções bidimensionais simples. Em qualquer dos casos apresentados, os varrimentos produzem volumes com propriedades geométricas fáceis de calcular. Esta facilidade complica-se um pouco se as secções bidimensionais que varrem os volumes apresentarem formas irregulares.

O cálculo das propriedades de volumes varridos torna-se bastante mais difícil nos chamados volumes varridos gerais. Nestes, a secção bidimensional que varre os volumes pode variar de ponto para ponto da trajectória, normalmente de forma contínua. O volume pode também ser varrido por um objecto tridimensional. A representação da modelação torna-se então complexa bem como o cálculo das propriedades geométricas do volume varrido, nomeadamente o cálculo do seu volume. Embora a interface ao utilizador seja simples dado que se trata de primeiro definir a secção ou volume que vai realizar o varrimento seguida da definição da trajectória de varrimento, a descrição obtida é complexa e, muitas vezes, é necessário convertê-la para outro tipo de representação para a poder armazenar de forma compacta.

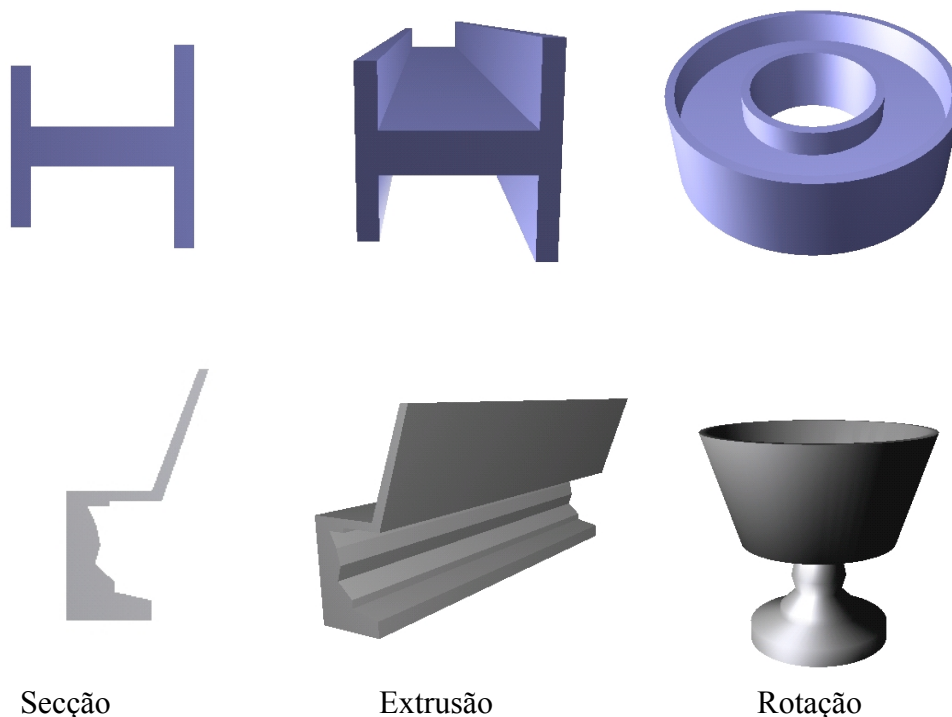


Figura 3.2 – Representação por varrimento. A partir de duas secções (à esquerda), constroem-se representações por extrusão (ao centro) e por rotação (à direita).

Uma outra desvantagem deste tipo de representação é a dificuldade em aplicar operações a objectos modelados por varrimento. Existem muitos casos em que não é possível descrever por varrimento a união de dois volumes descritos por varrimento como é o caso da união de um toro com um cilindro em que o cilindro está disposto segundo um diâmetro do toro, tal como a figura 3.3 apresenta. Em geral, a realização de operações entre volumes descritos por varrimento implica a conversão prévia das representações dos operandos para representações em que as operações sejam fáceis de realizar.

A representação da modelação de sólidos por varrimento não deixa, no entanto, de ter atractivos, nomeadamente a sua simplicidade e naturalidade. Estas derivam da

semelhança entre a descrição do varrimento de volumes e os processos de fabrico como a extrusão ou o corte por arranque de aparta. Este último transforma peças em bruto nas peças desejadas retirando camadas sucessivas de material, a aparta, por meio de uma ferramenta de corte em máquinas como as fresadoras e os tornos. Neste arranque de camadas sucessivas, a ferramenta de corte segue uma trajectória (que a figura 3.4 apresenta) que varre um volume correspondente ao volume de material a retirar. Existe assim uma correspondência directa entre o processo de fabrico e a representação da sua modelação por varrimento.

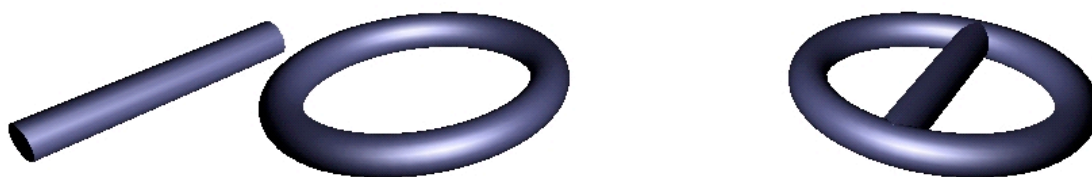


Figura 3.3 – A união de dois volumes descritos por varrimento pode não ser descritível por varrimento.

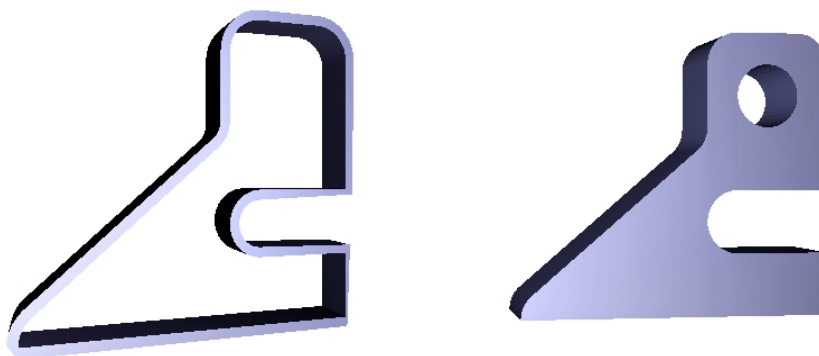


Figura 3.4 – Representação por varrimento do volume a remover pelo processo de corte por arranque de aparta (à esquerda da figura) na fabricação de uma peça (à direita).

3.3 Representação de Fronteira

A modelação geométrica de sólidos por representação de fronteira (também designada por *b-rep*, abreviatura de “*boundary representation*”) descreve os objectos a representar por meio das superfícies que os limitam e das arestas e vértices que estas superfícies apresentam⁶. As superfícies limitam os objectos mas não indicam de que lado da

⁶ Uma superfície esférica não tem vértices ou arestas.

superfície estes se encontram. Esta distinção é feita através da forma como cada elemento da superfície é definido, como mais adiante veremos. Em geral, poderemos considerar representações de fronteira em que os elementos das superfícies que a constituem podem assumir qualquer forma geométrica, mas isto significa passar os problemas derivados de formas complexas para cada um dos elementos constituintes da fronteira. Na prática, a maioria das representações de fronteira restringe estes elementos geométricos a formas simples como superfícies cónicas, cilíndricas, esféricas ou poligonais, regulares ou não, ou ainda impõem que tais elementos sejam planos. Restrições ainda mais severas, mas que aumentam a flexibilidade e simplicidade das representações de fronteira, podem obrigar a que os polígonos considerados sejam convexos ou, mesmo ainda, que sejam triângulos. Neste último caso limite, as representações de superfícies curvas serão sempre aproximadas. A precisão da aproximação dependerá do número e dimensão dos polígonos empregues na sua descrição.

De entre os vários tipos de representação de fronteira consideraremos os seguintes:

- representação por poliedros
- representação por arestas estendidas ou arestas com alas (winged-edge)
- representações não poliédricas

3.3.1 Representação por Poliedros

Os poliedros são sólidos geométricos cuja superfície é constituída por polígonos unidos por arestas, em que cada aresta pertence a um número par de polígonos. Um poliedro simples, ou seja, um poliedro sem furos, obedece à fórmula de Euler

$$V - A + F = 2 \quad (3.1)$$

que estabelece uma relação entre o número de vértices (V), o número de arestas (A) e o número de faces (F) de um qualquer poliedro simples⁷. Para poliedros gerais, a fórmula de Euler modificada passa a ser

$$V - A + F - FP = 2(C - P) \quad (3.2)$$

em que FP é o número de faces com furos, C o número de componentes distintos do poliedro (veja-se a figura 3.5) e P o número de furos que atravessam completamente o poliedro.

A representação de fronteira por malha poligonal é a representação mais comum de modelação de sólidos por poliedros⁸. Cada polígono de uma malha poligonal é descrito através da localização espacial dos seus vértices e arestas e possui informação sobre a localização do volume do sólido descrito pela malha em relação ao polígono. A convenção mais usual é a de enumerar os vértices do polígono em sentido directo (contrário aos sentido dos ponteiros do relógio) quando se visualiza o polígono a partir do exterior do sólido.

⁷ Esta condição é necessária, mas não suficiente, para que um conjunto de polígonos delimite um poliedro simples. Para tal, é ainda necessário que cada aresta pertença a duas faces e que o número de arestas concorrentes num dado vértice seja de, pelo menos, três arestas.

⁸ Os tipos mais comuns de malha poligonal serão descritos mais à frente neste capítulo.

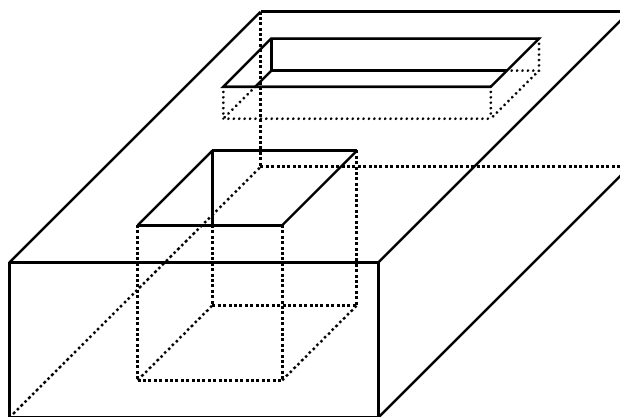


Figura 3.5 – Poliedro com um furo que o atravessa completamente e outro furo que não o atravessa. O poliedro tem um único componente e apresenta 36 arestas, 24 vértices, 15 faces (de que três apresentam furos) e um furo que atravessa completamente o poliedro.

A representação por malha poligonal tem a vantagem adicional de permitir a visualização rápida do sólido modelado através da representação das suas arestas. Este tipo de representação, denominado *modelo de arames*, permite verificar visualmente e de forma rápida a correcção da malha poligonal e transmite ainda uma imagem bastante aproximada dos sólidos modelados, tal como se pode observar na figura 3.6.

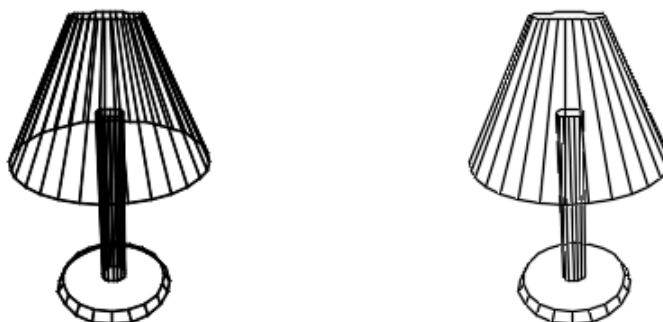


Figura 3.6 – Modelos de arames obtidos a partir de descrição por malha poligonal, com todas as arestas visíveis à esquerda e com remoção das arestas das faces traseiras à direita.

3.3.2 Representação por Arestas Estendidas ou Arestas com Alas

A realização de operações sobre sólidos modelados por representação de fronteira pode ser ineficiente se a representação não possuir informação que seja rapidamente acessível e que permita executar as operações pretendidas de forma simples e directa. A situação mais comum consiste em, dada uma aresta de uma dada face, determinar que outra face (ou outras faces) da fronteira com ela partilha essa aresta. Se a informação da malha não se encontrar devidamente organizada, há então que percorrer toda a lista de faces e, para

cada face, verificar se a face contém ou não a aresta procurada. Esta operação torna-se imediata se cada aresta tiver a si associada uma estrutura de dados contendo informação sobre as faces a que a aresta pertence.

A representação por *arestas estendidas* ou *arestas com alas* (*winged-edge*, em língua inglesa) resolve este problema associando estruturas de dados a cada aresta, vértice e face da malha poligonal. A estrutura de dados associada a uma aresta contém referências a cada um dos dois vértices da aresta, às faces a que pertence e às outras arestas que com ela concorrem (e, portanto, partilham) nos seus vértices. Cada vértice tem a si associada uma estrutura de dados referindo as arestas a que pertence. A estrutura de dados associada a cada face contém a lista de referências às arestas que possui. Cada uma destas estruturas encontra-se ordenada segundo a noção de antecessor e sucessor estabelecida segundo a direcção dos ponteiros do relógio. A criação destas estruturas ordenadas implica um esforço adicional do cálculo inicial que é posteriormente compensado no processamento da representação, pois as relações de adjacência passam a ser explícitas e removem a necessidade de efectuar buscas em listas mais ou menos longas.

3.3.3 Representações Não Poliédricas

Como vimos anteriormente, a representação poliédrica da fronteira para a modelação geométrica de sólidos conduz a representações aproximadas da fronteira quando os objectos a modelar apresentam faces não planas. Um exemplo simples desta aproximação consiste na representação poliédrica de uma superfície cilíndrica que é realizada pela substituição da superfície cilíndrica original por uma superfície prismática regular. Esta aproximação será tanto mais precisa quanto maior for o número de faces do prisma que realiza a aproximação. Em situações em que seja necessário calcular (e prever) colisões de um cilindro assim aproximado com um furo que também apresenta forma cilíndrica, iremos obter colisões que não deveriam ocorrer. Pode inclusive acontecer que a simples inserção do modelo do cilindro no modelo do furo nem sequer seja possível. Se, mesmo assim, o cilindro puder encaixar no furo, a animação da rotação do cilindro poderá não ser possível porque será detectada uma colisão com o modelo do furo logo que o modelo aproximado do cilindro (um prisma) seja rodado.

A solução para estes problemas passa por representações de fronteira não planas com o emprego de técnicas especiais que fazem apelo a representações matemáticas como os NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines).

3.4 Representação por Partição do Espaço

A representação geométrica de sólidos por partição do espaço consiste em representar sólidos por meio de conjuntos de sólidos elementares que, quando justapostos e sem se intersectarem, reproduzem o volume ocupado pelos sólidos a representar. Os sólidos elementares, as primitivas, podem ser de muitos e variados tipos como paralelepípedos regulares ou prismas triangulares irregulares e podem assumir diferentes posições, orientações e dimensões e operações de escalamento. Em geral, poderemos considerar quatro tipos de representação de sólidos por partição do espaço:



Figura 3.7 – A modelação de uma pá de turbina de gás implica a descrição de superfícies complexas utilizando NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines)

- Decomposição em células
- Enumeração da ocupação do espaço
- Árvore de octantes (ou de quadrantes, quando a duas dimensões)
- Árvore binária de decomposição do espaço (BSP⁹ tree)

3.4.1 Decomposição em Células

A representação de sólidos por *decomposição em células* tem por base a decomposição dos objectos a representar em células ou elementos primitivos paramétricos. Estes podem apresentar superfícies curvas. Este tipo de representação é semelhante à representação facultada pela linguagem VRML, embora esta linguagem permita que as primitivas se interpenetrem. A decomposição do espaço proíbe expressamente a intersecção e impõe a justaposição das primitivas que partilham pontos, arestas ou faces. Esta é também a diferença essencial entre a decomposição do espaço em células e a representação por instanciação de primitivas.

A representação de sólidos por decomposição do espaço em células não permite qualquer ambiguidade, mas pode não ser única, isto é, podem existir várias representações para um dado sólido. A figura 3.8 apresenta três representações diferentes de um mesmo objecto que foram obtidas por decomposição do espaço a partir de várias formas primitivas. Tal como a figura apresenta, é inclusivamente possível obter uma descrição à custa de uma única primitiva. É claro que as representações obtidas à custa de uma primitiva única serão sempre soluções menos compactas do que as representações que empreguem mais do que uma primitiva.

⁹ Binary space-partitioning.

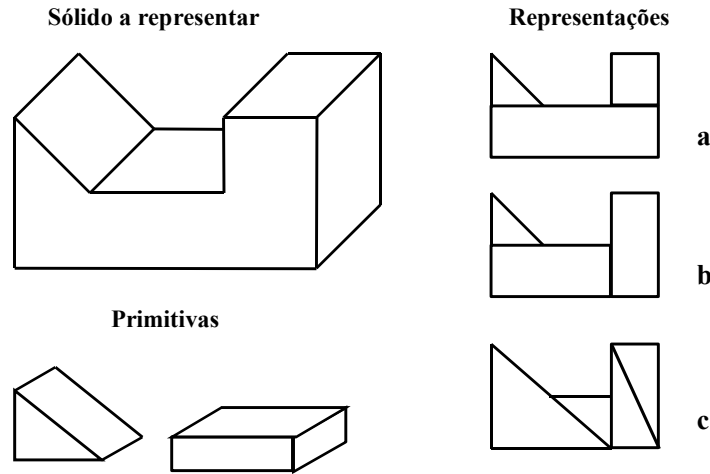


Figura 3.8 - Representação de um sólido por decomposição em células, apresentando três soluções distintas (a, b e c) em que a solução c recorre a uma única primitiva

3.4.2 Enumeração da Decomposição do Espaço

Na representação de sólidos por *enumeração da ocupação do espaço* cada sólido é representado por um conjunto de volumes idênticos que, conjuntamente, representam o volume ocupado pelo sólido a representar. A enumeração da ocupação do espaço decompõe o espaço segundo uma grelha tridimensional composta por volumes de forma e dimensões idênticos, os volumes elementares, também denominados por *vóxeis*. A representação de um sólido consiste então em arbitrar a discretização pretendida, ou seja, determinar a dimensão dos vóxeis, e, seguidamente, enumerar quais os vóxeis ocupados pelo sólido a representar. Uma tal representação é única e não contém quaisquer ambiguidades. A figura 3.9 apresenta o exemplo de um objecto decomposto em volumes elementares.

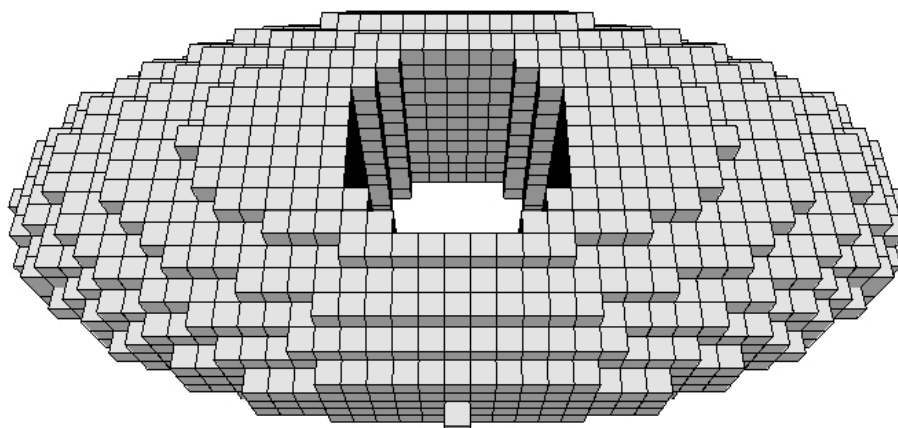


Figura 3.9 – Representação de um elipsóide, que apresenta um furo central, por enumeração da ocupação do espaço. Note-se a pouca precisão da descrição da fronteira.

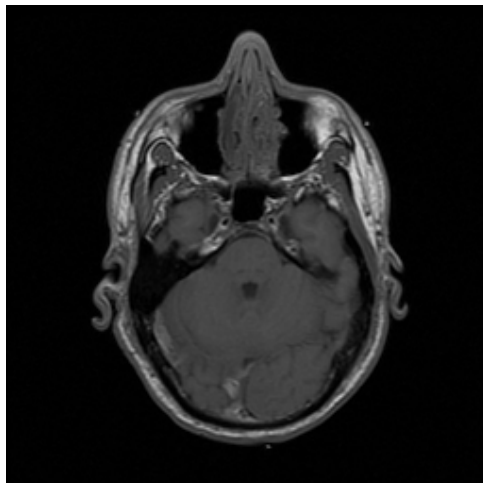


Figura 3.10 – Imagem de um corte da cabeça de um ser humano obtida por ressonância magnética, IRM (imagem produzida pelos autores a partir de dados do Visible Human Project, U. S. National Library of Medicine, National Institutes of Health)

Esta aproximação minimalista permite efectuar de uma forma expedita todas as operações lógicas entre modelos de sólidos devido à sua simplicidade. Assim, é fácil determinar se um volume elementar pertence ou não a um objecto e qual é a sua fronteira. A simplicidade desta representação permite ainda detectar colisões entre objectos e a sua adjacência de forma explícita, através da inspecção das células contíguas às células das fronteiras dos objectos.

No entanto, este tipo de representação apresenta alguns inconvenientes. O mais grave consiste no número elevado de volumes elementares necessários, uma vez que este número cresce segundo uma lei cúbica quando se diminui a dimensão dos volumes elementares para aumentar a discretização do espaço, na tentativa de obter representações mais precisas dos sólidos. Com efeito, a redução para metade das dimensões dos vóxeis implica $2^3=8$ mais vóxeis do que anteriormente. A forma dos vóxeis impede igualmente a correcta representação da superfície dos objectos. O emprego de vóxeis cúbicos não permite a representação exacta de fronteiras existentes em planos oblíquos pois esta representação não contempla o conceito de ocupação parcial dos vóxeis. Um voxel está sempre completamente ocupado ou vazio.

A representação de objectos por enumeração da ocupação do espaço é muito usada na visualização de dados de carácter espacial, nomeadamente em aplicações biomédicas. Os dados obtidos em tomografia axial computadorizada (TAC¹⁰) ou imagens por ressonância magnética (IRM¹¹), como é o caso da imagem da figura 3.10, representam propriedades dos volumes varridos e não de pontos, devido à resolução espacial permitida pelos equipamentos de tomografia. Isto torna ideal a sua representação por enumeração da ocupação do espaço.

¹⁰ Computerised Axial Tomography (CAT), em língua inglesa.

¹¹ Magnetic Resonance Imaging (MRI), em língua inglesa.

3.4.3 Representação por Árvore de Octantes

A representação de sólidos por *árvore de octantes* (*octree*) tem por objectivo eliminar a desvantagem principal da representação por enumeração da ocupação do espaço. Esta desvantagem consiste no elevado número de células em que o espaço tem que ser subdividido, para que se obtenha uma discriminação suficientemente fina que permita a definição precisa dos objectos a representar e das suas fronteiras. O número elevado de células traduz-se numa representação pouco compacta, com grupos de inúmeras células idênticas contíguas, e requer um consumo exagerado de memória. Na verdade, obter-se-iam representações muito mais compactas se cada grupo de células idênticas contíguas pudesse ser representado por uma única célula.

A representação por árvore de octantes aplica a estratégia de dividir para conquistar, dividindo o espaço em oito octantes pelo plano médio segundo cada direcção do espaço. Cada octante assim obtido é sucessivamente subdividido em sub-octantes até que estes se encontrem todos ocupados ou todos livres, ou ainda se atinja o nível máximo de subdivisão permitido. Depois de uma subdivisão, se os octantes resultantes forem homogéneos (todos ocupados ou todos livres), os octantes são substituídos pelo octante que lhes deu origem e o processo de subdivisão termina para esse octante. Este processo de subdivisão sucessiva gera uma árvore de octantes em que, em cada nível, existem oito ramos possíveis. Em geral, os ramos desta árvore terminam volumes que ou estão livres ou estão ocupados.

A construção de uma árvore de octantes pode ser realizada de duas formas distintas, pois o processo de construção pode ser ascendente ou descendente. Numa árvore de octantes descendente (construída de cima para baixo) parte-se do espaço total e realizam-se subdivisões sucessivas até que só existam octantes homogéneos. A construção ascendente da árvore parte, por sua vez, de uma enumeração espacial muito fina correspondente à maior subdivisão arbitrada e, sucessivamente, vai substituindo grupos homogéneos de octantes por um único octante, diminuindo assim a profundidade do ramo que está a ser processado.

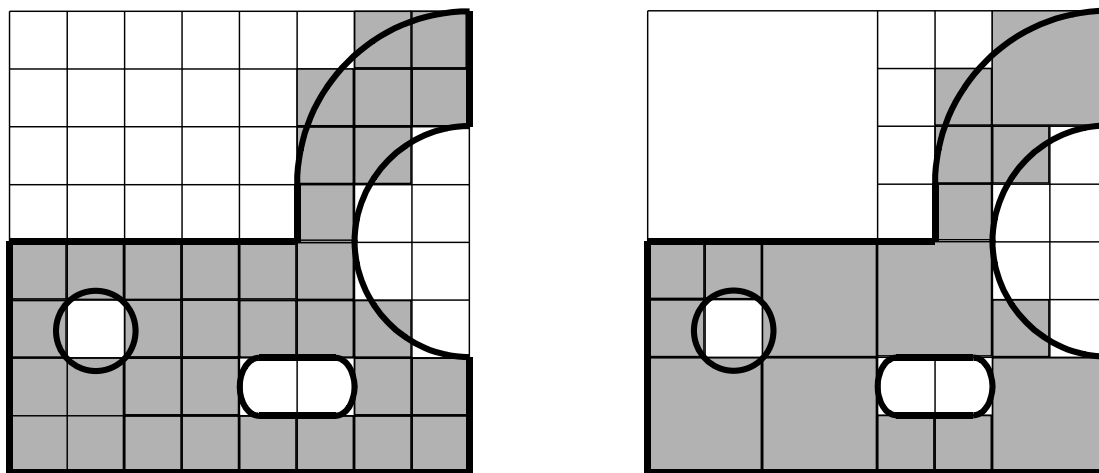


Figura 3.11 – Discretização de um objecto por enumeração da ocupação do espaço (à esquerda) e por árvore de quadrantes (à direita).

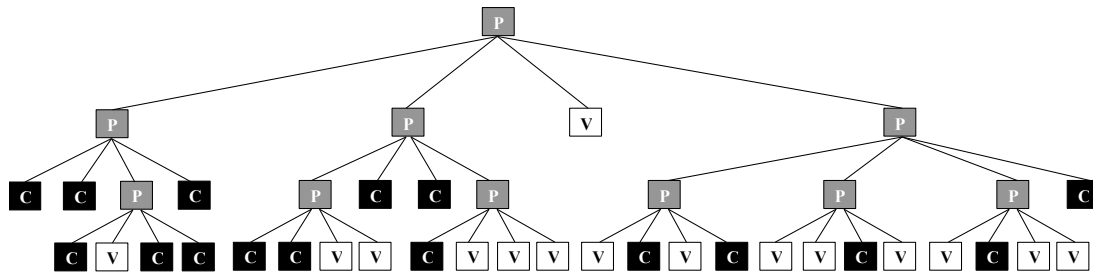


Figura 3.12 –Árvore de quadrantes correspondente à discretização do sólido da figura 3.11 por este processo de representação.

Este tipo de representação foi concebido a partir do algoritmo inicialmente desenvolvido para a compactação de objectos bidimensionais por meio de uma *árvore de quadrantes* (*quadtree*). Este algoritmo foi um dos primeiros algoritmos aplicados à compressão de imagens. A figura 3.11 apresenta um objecto bidimensional discretizado por enumeração da ocupação do espaço e por uma árvore de quadrantes, que é apresentada na figura 3.12.

A realização de operações lógicas entre dois objectos representados por árvores de octantes faz-se através do atravessamento descendente simultâneo das respectivas árvores, comparando nós correspondentes das árvores de octantes dos operandos.

No caso de uma união, se um dos dois nós se encontra ocupado, cria-se um nó ocupado na árvore do objecto resultante da união, terminando nesse nó a exploração do ramo. Se um dos nós a comparar se encontrar livre (ou vazio), atribui-se o ramo completo do outro objecto, a partir desse nó, ao nó da árvore contendo o resultado da união. No caso em que ambos os nós a comparar são nós parcialmente ocupados, cria-se um nó parcialmente ocupado na árvore resultante da união e passa-se ao processamento dos respectivos nós sucessores, tendo o cuidado de, após processar estes últimos, verificar se eles não resultam todos em nós totalmente ocupados. Neste caso, tais nós sucessores devem ser eliminados da árvore resultante da união e substituídos por um nó antecessor que deverá ser assinalado como sendo um nó totalmente ocupado.

O processamento de uma operação de intersecção é semelhante. Se um dos dois nós em comparação se encontrar vazio, o nó resultante na árvore correspondente à intersecção é assinalado como vazio e a exploração do respectivo ramo está terminada. Caso contrário, quando um dos nós a comparar se encontra totalmente ocupado, o ramo do nó da outra árvore é atribuído ao nó da árvore resultante da intersecção. Finalmente, quando os nós a processar estão assinalados como estando parcialmente ocupados, cria-se um nó parcialmente ocupado na árvore resultante da intersecção e processam-se os nós descendentes. Se deste processamento resultar que todos os nós sucessores se encontram vazios, estes devem ser eliminados e o seu antecessor deverá ser assinalado como um nó vazio.

A determinação de adjacências a um dado nó de uma árvore de octantes é um pouco mais complicada, dado que um nó possui 26 nós adjacentes¹² (6 ao longo das faces, 12 ao longo das arestas e 8 junto dos vértices). O método de procura de um nó adjacente a um dado nó consiste em subir na árvore de octantes até encontrar o primeiro nó que seja antecessor comum aos dois nós e, sem seguida, atravessar descendentemente a árvore até que o nó vizinho seja encontrado.

¹² Numa árvore de quadrantes, cada nó possui apenas 8 nós adjacentes.

3.4.4 Representação por Árvore de Partição Binária (BSP)

A representação de sólidos por *árvore de partição binária* (denominada *binary space-partitioning* ou BSP, em língua inglesa) pretende otimizar a estratégia de subdivisão aplicada na representação por árvore de octantes. Com efeito, a subdivisão de um octante em oito octantes (ou de um quadrante em quatro quadrantes) é feita cegamente, sem qualquer critério, segundo o plano médio de cada uma das três direcções do espaço, quando, por exemplo, uma melhor localização do plano bissector (ou da linha bissectriz no caso de quadrantes) resultaria em dois sub espaços em que um deles estaria ocupado pelo objecto e o outro estaria vazio, tal como a figura 3.13 à esquerda, demonstra. Por outro lado, poderemos obter uma representação mais exacta das fronteiras dos objectos (veja-se a mesma figura) se se fizer com que o plano bissector (ou a linha bissectriz) coincida com a fronteira, em lugar de estar alinhado com uma das direcções do espaço.

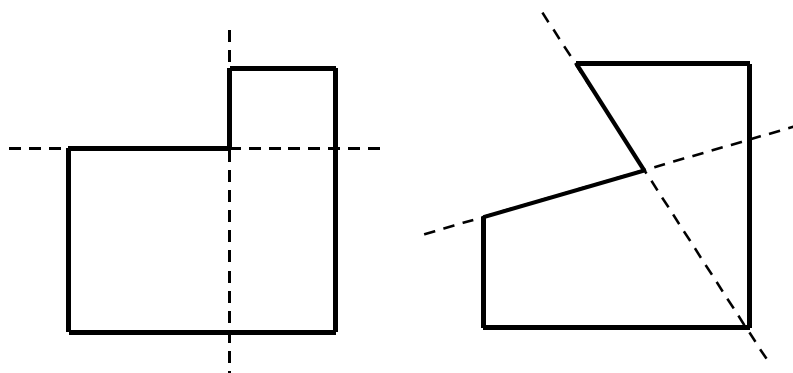


Figura 3.13 – Partição binária e localização das bissectrizes: paralelas aos eixos (à esquerda) e segundo as fronteiras (à direita)

Na repartição do espaço por árvore de partição binária, o espaço é dividido em apenas dois sub espaços por um plano arbitrário colocado de forma a coincidir com a superfície ou parte da superfície do objecto a representar. Em cada nível da árvore existirão apenas dois ramos. Podemos arbitrar que o ramo esquerdo corresponderá ao sub espaço "mais dentro do objecto" e que o ramo direito corresponderá ao sub espaço "mais fora do objecto". O sub espaço associado a cada ramo da árvore é então subdividido sucessivamente e colocado na árvore segundo este critério até que a subdivisão produza dois sub espaços homogéneos, em que um deles esteja totalmente dentro do objecto e o outro totalmente fora. Na figura 3.14 encontra-se representado um objecto bidimensional mostrando as linhas bissectrizes de divisão e duas das árvores de partição binária que é possível conceber.

Uma vantagem evidente deste tipo de representação é a maior fidelidade obtida na representação das fronteiras dos objectos.

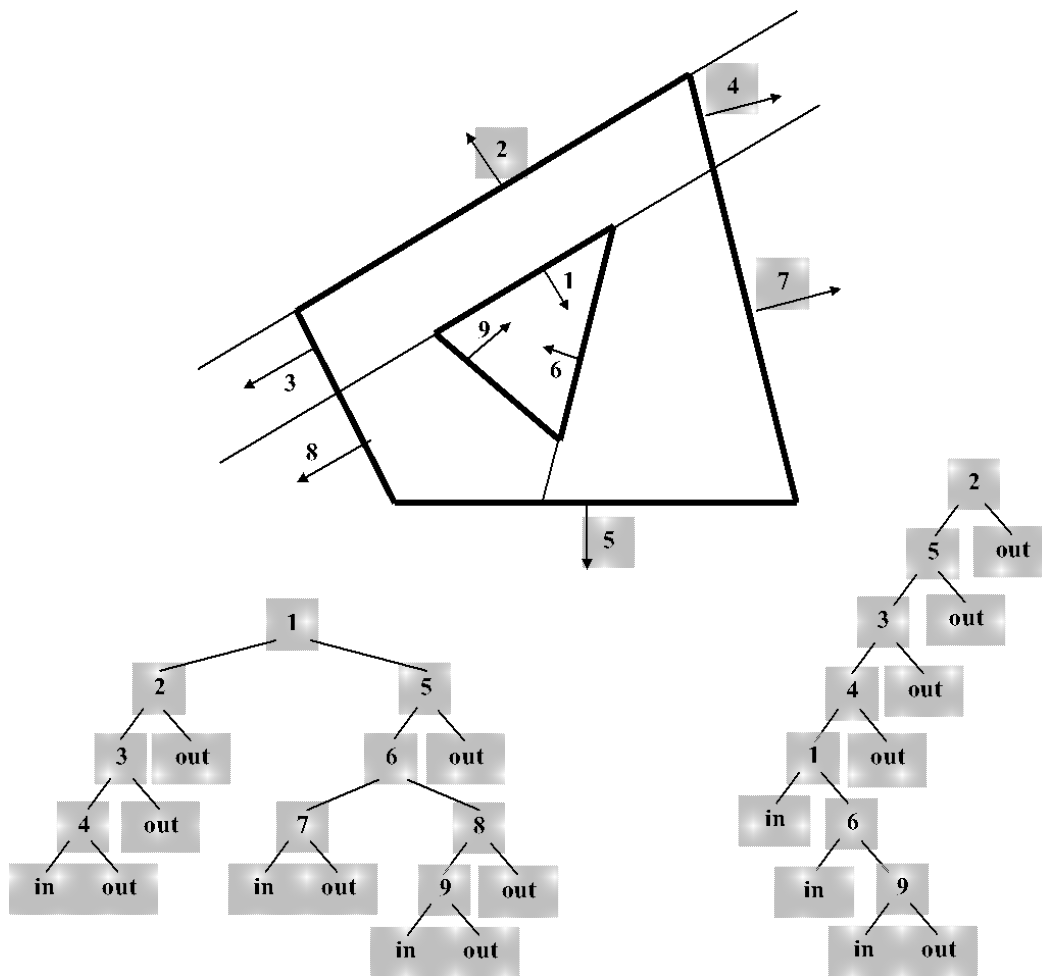


Figura 3.14 – Bissetrizes de divisão de uma figura e duas árvores de partição binária. Notem-se as diferenças entre as duas árvores, nomeadamente a profundidade e o número de planos empregues.

3.5 Representação por Geometria Construtiva de Sólidos (CSG)

A representação de objectos por Geometria Construtiva de Sólidos, comumente designada por CSG¹³, consiste em criar representações de objectos a partir de um conjunto de primitivas hierarquicamente estruturadas. Nesta estrutura hierárquica, os nós representam não só transformações mas também operações booleanas. Os operandos destas operações podem tanto ser primitivas como objectos resultantes de operações anteriores.

A figura 3.15 apresenta um objecto construído segundo CSG. Neste exemplo, as operações booleanas envolvidas são apenas duas: união e diferença¹⁴. Com estas duas operações, o sólido construído, a raiz da hierarquia, tem a expressão $(A-(BUC))U(D-E)$. O resultado não é ambíguo, mas não é único. Com efeito, o mesmo resultado poderia ter

¹³ Do inglês Constructive Solid Geometry

¹⁴ As operações booleanas serão tratadas um pouco mais à frente neste capítulo.

tido obtido com as mesmas operações definindo o objecto pela sequência ((A-C)UD)-(BUE).

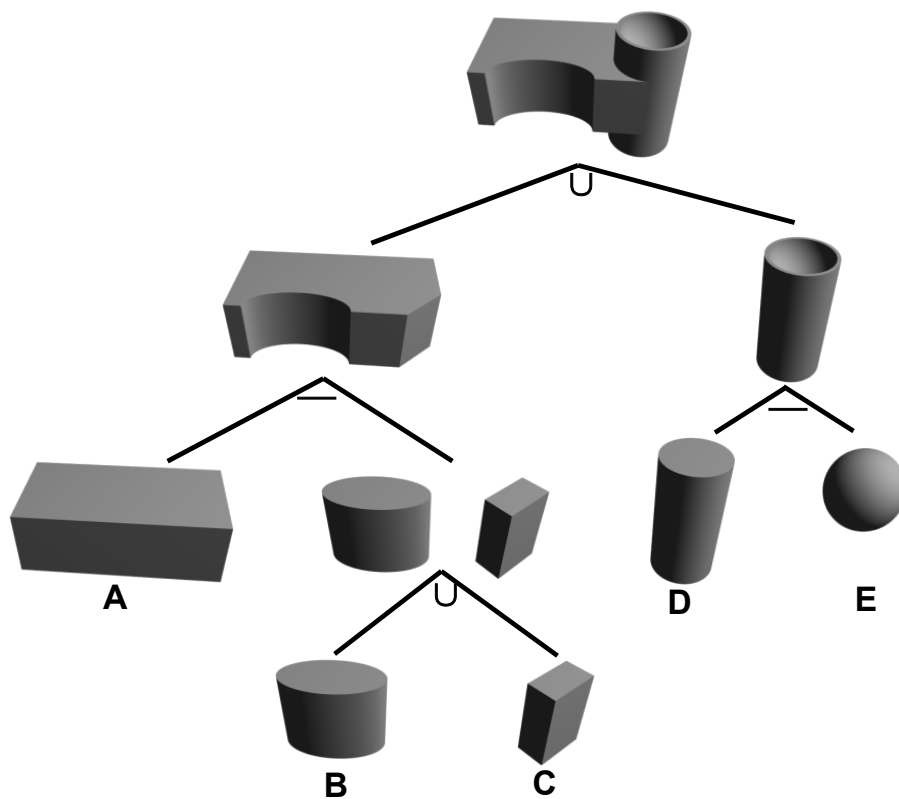


Figura 3.15 – Construção de um objecto por CSG a partir de objectos primitivos sujeitos a operações booleanas e transformações estruturadas hierarquicamente.

As transformações aplicadas a cada primitiva dependem da implementação específica de cada sistema de modelação por CSG. Em determinados sistemas, as primitivas podem ser instanciadas na sua posição definitiva, enquanto em outros elas terão que ser instanciadas em localizações predefinidas (na origem, por exemplo) e depois translacionadas para as respectivas posições finais.

A figura 3.16 demonstra a não unicidade das representações CSG, apresentando duas soluções diferentes mas igualmente válidas para a representação de um mesmo objecto através da diferença entre duas primitivas, num dos casos, e da união de duas primitivas no outro caso. O facto de a representação não ser única tem consequências que é necessário ter em conta. Um exemplo disto é o que sucede quando uma das primitivas for transformada, tal como a figura 3.17 apresenta. Neste caso, pretendeu-se deslocar para cima a face superior do objecto construído, o que implicou a aplicação de uma transformação de escala ao objecto A no caso da diferença (à esquerda na figura 3.17), enquanto, no caso da construção por união, a escala foi aplicada à primitiva B (à direita na mesma figura). Os dois resultados são diferentes, tal como a figura o demonstra.

Embora a representação de um objecto por CSG apresente as desvantagens anteriores, a sua simplicidade e facilidade de emprego sobrepõem-se aos inconvenientes apontados. Em consequência, este tipo de representação é um dos tipos mais empregues e

populares, tendo sido adoptado por muitos produtos de modelação e, também, visualização de cenas.

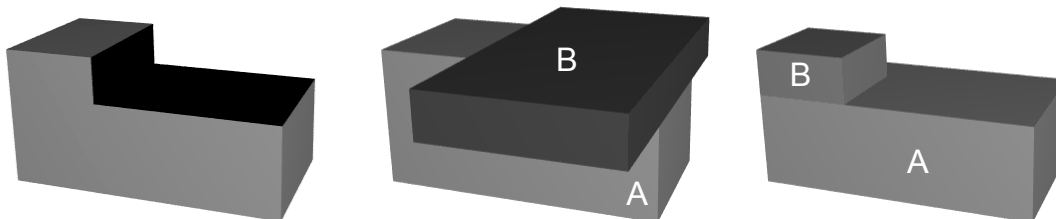


Figura 3.16 – Solução não única. O sólido à esquerda pode ser representado por uma diferença (ao centro) ou por uma união (à direita)

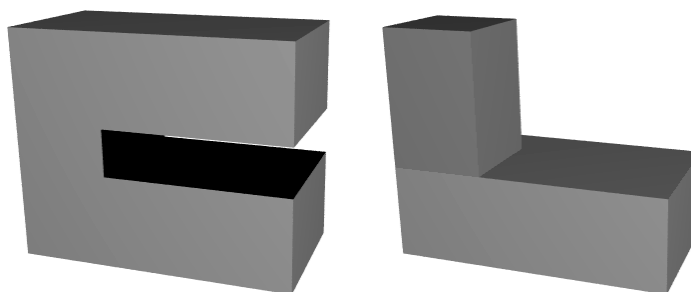


Figura 3.17 – A deformação por escala para mover a face superior de um objecto construído segundo representações diferentes origina resultados diferentes.

Como observação final, podemos fazer notar que as representações por partição do espaço por decomposição em células e por enumeração de decomposição do espaço podem ser encaradas como casos especiais de representação por CSG em que as operações disponíveis se encontram reduzidas à união.

4 Operações Booleanas em Modelação Geométrica

A modelação geométrica de objectos emprega vários tipos de entidades como primitivas, células e malhas. A associação destas entidades permite criar novos objectos que, sucessivamente, aproximam os objectos que se pretende modelar. Uma operação de associação não tem um resultado único pois depende de que tipo de associação se pretende efectuar. Um prisma quadrangular pode ser obtido pela justaposição de dois cubos que possuem uma face comum, mas um cubo com um furo circular não pode ser obtido pela adição de volumes do cubo e de um cilindro. Neste caso é necessário subtrair um volume cilíndrico ao cubo. Vemos assim que a associação de sólidos para modelar um novo sólido depende do tipo de associação pretendido, isto é, depende da *operação booleana* a realizar entre os volumes dos operandos.

Os operadores booleanos empregados em modelação de sólidos permitem adicionar dois volumes, isto é, calcular a sua união (\cup), determinar o volume comum, ou seja, a sua intersecção (\cap), e a sua diferença ($-$), de que resulta um volume que é igual ao volume de um dos dois operandos menos o volume da sua intersecção e depende da ordem dos operandos, tal como a figura 4.1 apresenta.

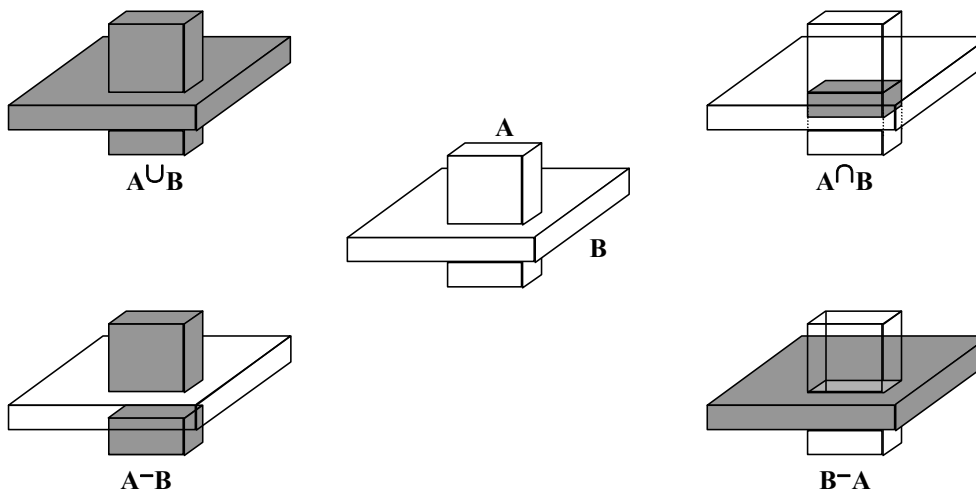


Figura 4.1 – Operadores lógicos entre sólidos modelados: união, intersecção e as duas diferenças.

O resultado de operações booleanas sobre volumes não é necessariamente um volume e depende ainda de se considerar se a fronteira faz ou não parte do volume que limita. Da intersecção de dois cubos resultará um cubo de menores dimensões se os dois cubos se interpenetrarem. Mas, tal como a figura 4.2 mostra, da intersecção de dois cubos pode também resultar uma superfície plana (uma face comum), uma aresta (ou parte dela) ou um vértice. O resultado obtido depende da posição relativa dos dois cubos, podendo inclusive ser um conjunto vazio se os dois cubos estiverem afastados.

Os resultados apresentados pela figura 4.2 correspondem à situação em que se considera que os volumes dos operandos (os cubos) são constituídos pela *fronteira* e pelo *espaço interior à fronteira*, isto é, são *volumes fechados*. Um volume constituído apenas pelo espaço interior à fronteira é um *volume aberto*. Considerando então que os cubos da figura 4.2 são volumes abertos, obteremos intersecções correspondentes a um conjunto vazio, quando antes tínhamos uma face, uma aresta ou um ponto (vértice). Chama-se regularização de um objecto à operação que determina a fronteira que envolve todos os pontos interiores de um volume aberto. Um objecto cujo conjunto de pontos constituintes é idêntico ao seu fecho denomina-se *objecto regular* ou *objecto regularizado*.

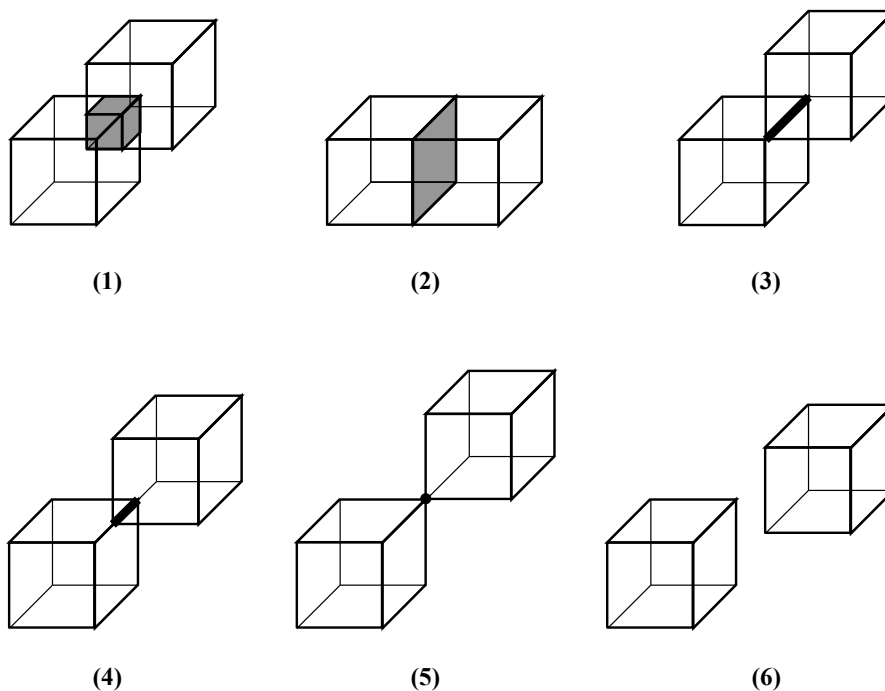


Figura 4.2 – Alguns dos resultados possíveis da intersecção de dois cubos: 1) um volume (um cubo); 2) uma face; 3) uma aresta; 4) uma parte de uma aresta; 5) um ponto (vértice); 6) o conjunto vazio

5 Modelo de Malha Poligonal

O *modelo de malha poligonal* é um modelo de representação geométrica de sólidos por representação da fronteira que descreve as superfícies dos objectos através de uma colecção de polígonos. Estes polígonos podem existir nas superfícies dos objectos ou resultarem de ajustamentos que aproximam as formas curvas das superfícies por objectos poligonais. Um modelo de malha poligonal corresponde então à enumeração de uma colecção de arestas, vértices e polígonos interligados numa malha que, no seu conjunto, descreve a fronteira dos objectos a representar. Cada aresta liga dois vértices e deve ser partilhada por um mínimo de dois polígonos adjacentes¹⁵. Se o não for, a malha não é uma malha contínua e a superfície que a malha descreve não é, naturalmente, uma superfície fechada. Cada *polígono* de um modelo de malha poligonal é descrito por uma sequência ordenada e fechada¹⁶ de, pelo menos, três vértices ou três arestas. Cada *vértice* deve, por sua vez, ser partilhado por um mínimo de duas arestas.

No caso de um cubo, a discretização da sua superfície por uma malha poligonal está intrinsecamente definida à partida pelos quadrados que constituem cada uma das suas seis faces¹⁷. A representação de um cilindro é mais complexa, pois um cilindro é constituído por duas bases circulares e por uma superfície lateral de cuja planificação

¹⁵ Numa malha fechada, cada aresta deve ser partilhada por um número par de polígonos.

¹⁶ O fecho de um polígono pode ser explícito, quando se repete o elemento (vértice ou aresta) inicial, ou implícito, quando se omite esta repetição.

¹⁷ Uma face de um cubo também pode ser descrita por dois triângulos.

resulta um rectângulo. Cada círculo das bases pode ser considerado como um polígono regular com um número infinito de lados. Na prática este número de lados tem que ser finito e não muito elevado, mas deve ser suficientemente grande para que a representação do polígono em dispositivos de saída gráfica tenha a aparência de um círculo. A figura 5.1 apresenta a discretização das bases de um cilindro por meio de um polígono regular inscrito nas bases.

A superfície lateral do cilindro pode ser representada por uma superfície cilíndrica. Isto introduzirá problemas no andar do pipeline de visualização correspondente à remoção de superfícies invisíveis, pois há que determinar que partes da superfície cilíndrica são visíveis pelo observador e que partes são invisíveis e, por isso, devem ser removidas. Por este motivo, a superfície lateral de cilindros é usualmente substituída por uma superfície prismática regular em que as considerações anteriormente feitas quanto ao número de lados do polígono regular, que aproxima as bases do cilindro, voltam a ser aplicadas (veja-se a figura 5.1). O objectivo é, mais uma vez, proporcionar ao observador uma sensação de continuidade da superfície lateral do cilindro ainda que esta se encontre facetada. A operação de determinação de que partes da superfície lateral do cilindro se encontram visíveis encontra-se assim facilitada, dado que agora só há que determinar que faces laterais do prisma se encontram visíveis.

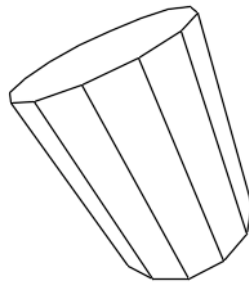


Figura 5.1 – Malha poligonal descrevendo um cilindro. Tanto a superfície lateral como a base e o topo são aproximados.

5.1 Operações sobre Modelos de Malha Poligonal

Existem, como a seguir veremos, várias formas de representar uma malha poligonal. Cada uma delas emprega uma estrutura de dados própria. O tipo de estrutura de dados a empregar em cada caso concreto depende de que operações irão ser realizadas ao processar a malha poligonal. Estas poderão ser a representação dos objectos modelados em dispositivos de saída gráfica ou a verificação da consistência e correcção da malha poligonal que os descreve.

Os vários tipos de estruturas diferem entre si no espaço de memória de que necessitam e no tempo de cálculo correspondente a cada operação a realizar. Em geral, as estruturas mais complexas são aquelas que proporcionam maior flexibilidade na realização de operações. A lista de operações que a seguir é apresentada, e que não é exaustiva, inclui as operações mais comuns efectuadas sobre malhas poligonais.

- *Representar a malha em dispositivos de saída gráfica* - Esta operação requer o conhecimento de que vértices compõem cada polígono e não necessita de informação sobre as arestas mas, se se tratar de traçar apenas as arestas, deixa de

ser necessário ter informação sobre os polígonos da malha, sendo apenas necessária informação sobre as coordenadas dos vértices de cada aresta

- *Determinar que arestas concorrem num dado vértice*
- *Determinar os vértices de uma dada aresta*
- *Determinar os polígonos que partilham uma dada aresta ou um dado vértice*
- *Verificar a consistência da malha, determinando faltas de arestas, vértices ou polígonos*

Como é natural, é o tipo de processamento pretendido que determina que operações serão realizadas sobre os modelos de malha poligonal. A representação de malhas poligonais em dispositivos de saída gráfica pode não necessitar de informação sobre a adjacência de polígonos, sendo suficiente que o modelo forneça, de forma explícita, informação sobre cada um dos polígonos a processar. No caso contrário, o tipo de modelo de malha poligonal deve então facilitar a realização de operações tais como a determinação dos polígonos que partilham arestas ou vértices.

5.2 Malha Poligonal de Lista Explícita

Na descrição de uma malha poligonal por meio de *lista explícita*, cada polígono é descrito por um conjunto de ternos ordenados em que cada terno contém as coordenadas de um vértice do polígono.

$$P = \{(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n)\} \quad (5.1)$$

Cada polígono deste tipo de malha poligonal contém apenas informação sobre o próprio polígono. Isto é suficiente para o caso raro em que a malha poligonal contém um só polígono ou quando o processamento de cada polígono pode ser efectuado independentemente de todos os outros polígonos da malha. Neste último caso existe um utilização ineficiente da memória já que o mesmo vértice é armazenado tantas vezes quanto o número de polígonos que o referem.

Este tipo de modelo de malha poligonal não possui qualquer informação sobre os vértices e arestas comuns a dois ou mais polígonos. Em consequência, qualquer aresta comum a dois ou mais polígonos é desenhada em dispositivos de saída gráfica tantas vezes quanto o número de polígonos a que a aresta pertença¹⁸. Uma forma de evitar o desenho duplicado de arestas consiste em, antes de desenhar uma dada aresta, percorrer todos os polígonos anteriormente desenhados para determinar se a aresta pertence a algum deles e, portanto, foi já desenhada. Este procedimento tem o inconveniente óbvio de aumentar substancialmente o tempo de processamento.

A utilização de malhas poligonais de lista explícita é também pouco eficiente quando se pretende alterar as coordenadas dos vértices. Esta operação é muito frequente durante a manipulação de uma representação geométrica e, conseqüentemente, deverá poder ser realizada o mais rapidamente possível. Mas numa malha poligonal de lista explícita a alteração das coordenadas de um vértice é extremamente lenta, pois implica percorrer

¹⁸ Em dispositivos de saída gráfica lenta esta duplicação pode representar bastante tempo perdido.

toda a lista de polígonos para alterar as coordenadas de todas as ocorrências do vértice a modificar.

5.3 Malha Poligonal de Lista de Vértices

A descrição de malhas poligonais por lista de vértices baseia-se na construção de um conjunto de ternos ordenados contendo as coordenadas de cada vértice. Esta lista, que não contém vértices duplicados, é

$$V = \{V_1, V_2, \dots, V_n\} = \{(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n)\} \quad (5.2)$$

Cada polígono passa então a ser descrito por uma lista de vértices em que cada elemento corresponde ao número de ordem desse vértice na respectiva lista ou uma referência para a estrutura que contém as coordenadas do vértice.

$$P_i = \{V_j, V_k, \dots, V_m\} \quad (5.3)$$

e a lista de polígonos é, naturalmente,

$$P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\} \quad (5.4)$$

A figura 5.2 apresenta um exemplo simples de uma malha poligonal descrita por lista de vértices.

Esta descrição é mais compacta do que a descrição por lista explícita pois evita o gasto de memória provocado pela duplicação do armazenamento das coordenadas dos vértices. Por outro lado, a operação de alteração das coordenadas de um dado vértice passa a ser explícita, sendo a alteração dessas coordenadas realizada uma única vez. No entanto, as arestas comuns a dois ou mais polígonos continuam a ser desenhadas duas ou mais vezes nos dispositivos de saída gráfica.

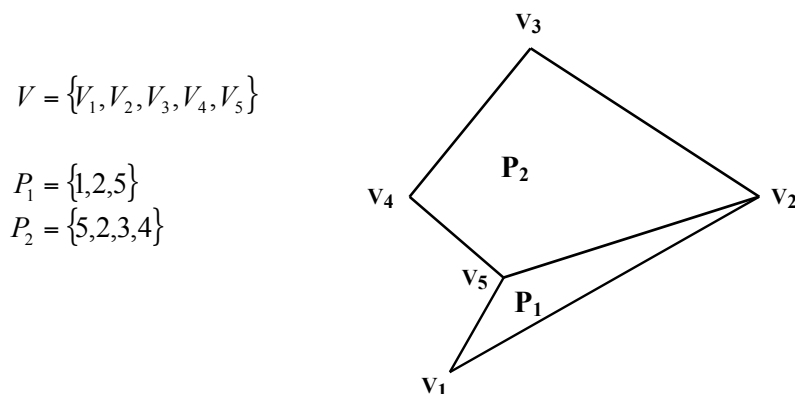


Figura 5.2 – Malha poligonal de lista de vértices

A representação de malhas poligonais por lista de vértices, tal como a representação por lista explícita, não é eficiente na determinação de adjacências de polígonos. A realização desta operação continua a obrigar a percorrer toda a lista de polígonos para determinar se e quais polígonos referenciam um dado vértice ou uma dada aresta (dois vértices consecutivos na lista de vértices do polígono) do polígono cujas adjacências se pretende determinar.

5.4 Malha Poligonal de Lista de Arestas

A representação de malhas poligonais por lista de arestas tem por objectivo permitir executar de forma eficiente a operação de determinação das adjacências que nas representações por lista explícita e por lista de vértices é demasiado pesada. Tal como na representação por lista de vértices, a representação por lista de arestas constrói uma lista de vértices únicos, isto é, sem duplicação de vértices

$$V = \{V_1, V_2, \dots, V_n\} = \{(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n)\} \quad (5.5)$$

Constrói-se agora uma lista de arestas únicas

$$A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\} \quad (5.6)$$

que referenciam os respectivos vértices e os polígonos a que pertencem. Estas referências encontram-se numa estrutura associada a cada aresta e referem os dois vértices e, pelo menos, dois polígonos se a malha for fechada.

$$A_j = \{V_o, V_p, P_q [P_f, \dots, P_t]\} \quad (5.7)$$

Finalmente, mantém-se a lista de polígonos

$$P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\} \quad (5.8)$$

mas agora existe uma estrutura associada a cada polígono que referencia um mínimo de três arestas

$$P_i = \{A_d, A_e, A_f [\dots, A_h]\} \quad (5.9)$$

A figura 5.3 apresenta a descrição de uma malha simples através de lista de arestas.

Tal como para a representação por lista de vértices, a alteração das coordenadas de um vértice é uma operação simples e explícita e não existe duplicação de informação que implique gastos desnecessários de espaço de armazenamento.

$$\begin{aligned}
 V &= \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5\} \\
 A_1 &= \{V_1, V_2, P_1\} \\
 A_2 &= \{V_2, V_3, P_2\} \\
 A_3 &= \{V_3, V_4, P_2\} \\
 A_4 &= \{V_4, V_5, P_2\} \\
 A_5 &= \{V_5, V_1, P_1\} \\
 A_6 &= \{V_5, V_2, P_1, P_2\} \\
 P_1 &= \{A_1, A_6, A_5\} \\
 P_2 &= \{A_4, A_6, A_2, A_3\}
 \end{aligned}$$

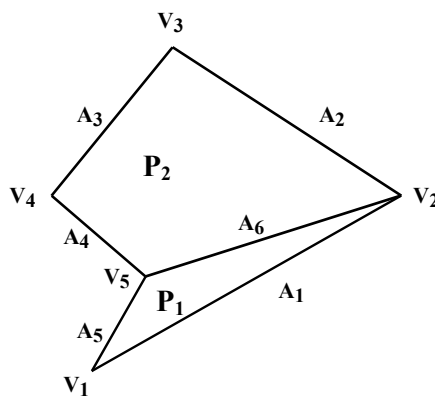


Figura 5.3 – Exemplo de malha poligonal de lista de arestas

A vantagem principal da representação por lista de arestas é tornar explícita a determinação da adjacência de polígonos. Com efeito, cada conjunto de polígonos adjacentes encontra-se explicitado na estrutura associada à aresta comum aos polígonos adjacentes. Esta representação apresenta também a vantagem de eliminar o desenho duplicado de arestas em dispositivos de saída gráfica, pois para desenhar as arestas basta percorrer a lista de arestas na qual cada aresta é única. Isto traduz-se então na redução do trabalho realizado pelo pipeline de visualização no recorte, transformação e conversão dos segmentos de recta correspondentes ao desenho das arestas.

A única desvantagem que pode ser apontada à representação de malhas poligonais por lista de arestas consiste na impossibilidade de determinação explícita de que arestas concorrem num dado vértice dado que a estrutura associada a cada vértice contém apenas as respectivas coordenadas.

5.5 Verificação da Consistência de Malhas Poligonais

Naturalmente, a geração de representações por meio de malhas poligonais está sujeita a erros. Estes podem ser cometidos pelo utilizador ao definir a malha, mas também podem ser introduzidos por geradores automáticos de malha ao depararem com casos não previstos. A verificação da consistência de uma malha deverá atender aos seguintes critérios:

- Todos os polígonos devem ser fechados.
- Todas as arestas devem ser referenciadas (usadas) pelo menos uma vez (duas vezes no caso de a malha ser fechada) e não mais do que um determinado número de vezes. Este número depende da forma da superfície descrita pela malha. Se a superfície não for multiplamente conectada, o valor máximo a empregar deve ser 2.
- Cada vértice deve ser usado (referenciado) por, pelo menos, duas arestas.

Em malhas fechadas deve-se verificar se existem lacunas devidas à falta de polígonos. Tais lacunas são denunciadas pela existência de arestas que são referenciadas uma única vez. Em malhas poligonais representando superfícies conectadas deve ser possível ligar um vértice a um outro vértice qualquer percorrendo as arestas e passando por cada aresta uma única vez. Finalmente, em malhas topologicamente planas, deve verificar-se

se os polígonos com mais do que três arestas são planos ou não, isto é, se todos os pontos do polígono existem no mesmo plano.

A representação de malhas poligonais por lista de arestas é a representação que apresenta maior facilidade de verificação da sua consistência pois contém mais informação do que qualquer das outras representações e permite realizar de forma explícita a maioria das operações.

Existem ainda outros critérios complementares para a verificação da consistência de representações por malha poligonal. São eles:

- Uma aresta não deve ser usada (referenciada) duas ou mais vezes num mesmo polígono.
- Um vértice deve pertencer a, pelo menos, um polígono.
- As arestas não podem apresentar comprimento nulo.
- Na representação por lista de arestas, a referência entre arestas e polígonos tem que ser recíproca. Um polígono não pode referenciar uma aresta se esta, por sua vez, não referenciar o polígono.

5.6 Verificação de Malhas Topologicamente Planas

A verificação de malhas topologicamente planas requer um tratamento especial. Esta verificação só faz sentido se na malha existirem polígonos que não sejam triângulos, pois um triângulo é uma figura geométrica intrinsecamente plana. A verificação se todos os vértices de um polígono pertencem ao mesmo plano consiste em determinar a equação do plano do polígono a partir de três dos vértices do polígono, seguida da verificação se os restantes vértices do polígono pertencem ao plano.

A equação de um plano é

$$Ax + By + Cz = D \quad (5.10)$$

em que os coeficientes A , B e C correspondem aos valores das componentes do vector normal ao plano.

Em determinadas circunstâncias como, por exemplo, em cálculos de iluminação, convém que este vector seja unitário. Para tal, bastará multiplicar os valores das suas componentes pelo inverso do seu módulo

$$k = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (5.11)$$

Os coeficientes A , B e C da equação do plano de um polígono determinam-se calculando o produto externo de dois vectores formados a partir da sequência ordenada dos vértices do polígono. Assim, considerando três vértices consecutivos, V_1 , V_2 e V_3 (veja-se a figura 5.4), a normal ao plano do polígono será o vector

$$[ABC] = \overrightarrow{V_1V_2} \times \overrightarrow{V_1V_3} = \overrightarrow{V_2V_3} \times \overrightarrow{V_2V_1} = \overrightarrow{V_3V_1} \times \overrightarrow{V_3V_2} \quad (5.12)$$

O valor de D é então determinado a partir de um qualquer dos três vértices¹⁹. Se a malha for topologicamente plana, os restantes vértices do polígono deverão existir no plano cujos coeficientes acabam de ser determinados. Esta condição poderá não se verificar, quer porque o método de geração da malha é inadequado, caso em que se deverá optar por outro método, quer por erro numérico. Neste último caso o erro poderá ser aceite se se encontrar dentro de uma tolerância prescrita que tenha em conta os erros numéricos cometidos nos cálculos efectuados.

Convém notar que, se o polígono for côncavo e os vértices escolhidos para determinar a normal ao plano do polígono corresponderem a uma concavidade como, por exemplo, os vértices 1, 2 e 3 do polígono representado na figura 5.4 à direita, a normal assim calculada será a inversa da normal ao plano do polígono. Tal não sucederia se o cálculo tivesse sido realizado a partir dos vértices 4, 5 e 1. Para estes casos é necessário empregar um outro algoritmo que permita determinar correctamente o vector normal.

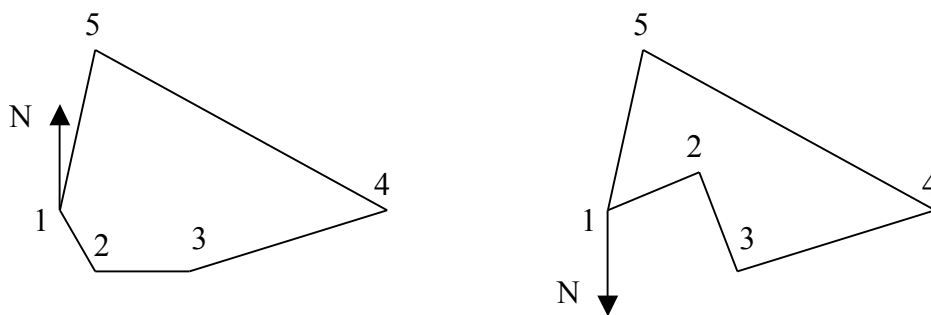


Figura 5.4 – Determinação da normal ao plano de um polígono: a normal calculada a partir dos pontos 1, 2 e 3 tem o sentido errado no caso do polígono côncavo.

O algoritmo alternativo para determinar os coeficientes da equação do plano quando são dados mais do que três vértices de um polígono permite uma melhor aproximação dos valores dos coeficientes, dado que toma em conta todos os pontos e não apenas três dentre eles, além de evitar problemas como o problema anterior. O algoritmo baseia-se no facto de os coeficientes A , B e C serem proporcionais às áreas projectadas do polígono, cujos vértices correspondem aos pontos dados, sobre os planos (y,z) , (z,x) e (x,y) , respectivamente. Deste modo, os coeficientes A , B e C são

$$\begin{aligned}
 A &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} (z_i + z_{i\alpha 1})(y_{i\alpha 1} - y_i) \\
 B &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} (x_i + x_{i\alpha 1})(z_{i\alpha 1} - z_i) \\
 C &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} (y_i + y_{i\alpha 1})(x_{i\alpha 1} - x_i)
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

¹⁹ Os vértices são colineares se o produto externo for nulo.

em que o operador $i\alpha 1$ corresponde a

$$i\alpha 1 = \begin{cases} i+1 & \text{se } i \neq n \\ 1 & \text{se } i = n \end{cases} \quad (5.14)$$

Uma vez determinados todos os coeficientes da equação do plano, poderemos calcular em que medida o polígono formado pelos vértices se afasta do plano, calculando a distância de cada um dos pontos ao plano. Esta distância, para um ponto de coordenadas (x,y,z) , é

$$d = \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (5.15)$$

ou simplesmente

$$d = Ax + By + Cz + D \quad (5.16)$$

se o vector normal for unitário.

Esta expressão sugere um processo para o cálculo do coeficiente D. Com efeito, poderemos calcular o valor de D como sendo o valor que minimiza a distância dos pontos ao plano²⁰.

²⁰ Empregando um critério de mínimos quadrados, por exemplo.

Exercícios

- 1 Apresente três propriedades desejáveis para um esquema de representação de modelos geométricos tridimensionais. Escolha, justificando, um esquema de representação para um prego.
- 2 Um objecto complexo é descrito por meio de instanciação de primitivas organizadas hierarquicamente. Será possível aplicar um qualquer tipo de transformação geométrica a cada um dos ramos da árvore representativa desta hierarquia? Justifique.
- 3 Apresente as várias formas de modelação geométrica por descrição de trajectória, indicando as suas diferenças, e cite casos em que o emprego deste tipo de modelação seja mais adequado.
- 4 Em que consiste a modelação geométrica por representação de fronteira? Apresente uma vantagem e uma desvantagem deste tipo de modelação geométrica em relação aos outros tipos.
- 5 Apresente as vantagens da modelação por meio de árvore de partição binária sobre a modelação geométrica por árvore de octantes e desta sobre a enumeração da ocupação do espaço.
- 6 Descreva a estratégia seguida pelo algoritmo de cálculo de elementos visíveis baseado em Árvore BSP e quais as suas características quanto ao tipo de processamento requerido. Descreva uma situação em que a utilização deste tipo de algoritmo seja adequada.
- 7 Compare a modelação geométrica de objectos através da representação de fronteira com a partição enumerada do espaço e apresente uma vantagem de cada um deles sobre o outro.
- 8 A modelação geométrica por instanciação de primitivas e a modelação geométrica por decomposição do espaço empregam formas geométricas primitivas para descrever os objectos a modelar. Que distingue estas primitivas e, portanto, diferencia estas duas formas de modelação geométrica? Se tivesse que escolher entre estes dois tipos de modelação geométrica para modelar um objecto com um furo cilíndrico onde deve girar um outro objecto de forma cilíndrica, qual dos dois tipos escolheria?
- 9 Será que todos os tipos de modelação geométrica permitem a descrição de um objecto composto pela união de dois objectos? Justifique e indique o tipo de modelação geométrica em que é mais fácil produzir a descrição do objecto composto.
- 10 Ao decidir modelar um objecto, tem a hipótese de escolher entre descrevê-lo por instanciação de primitivas e por descrição de trajectória. Apresente as razões pelas quais optaria por uma ou por outra destas duas descrições.
- 11 Apresente os critérios que devem ser aplicados em todas as verificações da consistência de malhas poligonais, justificando a razão de cada um desses critérios.

- 12 A que tipo de modelação geométrica pertence a descrição de objectos através de malhas poligonais? Que variantes apresenta esta descrição e como devem estas ser aplicadas?